語・タイル張りの代数構造と組合せ構造 (代数と言語のアルゴリズムと計算理論)

森田, 純

数理解析研究所講究録
第 1712 巻 2010 年 39-46

語・タイル張りの代数構造と組合せ構造

筑波大学・数理物質科学研究科・数学専攻　森田　純 (Jun Morita)
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

概要

ここでは、有限語や（1次元）タイル張りに付随する代数構造と組合せ構造についての概略を述べ、そこから生ずる不変量について紹介し、さらに或る種のオートマトンとの関連についても言及する。

1. 語

語といえば通常は有限語を意味する。しかし、タイル張りの立場からすると、両側無限語も同時に扱う方が都合の良いこともあるので、そこは臨機応変に議論を進めていく。すなわち、（有限）語は仮想的に（両側）無限語の一部であると思うことも出来るし、逆に、無限語といっても局所的に有限部分を扱うことも多いので、常にその有限部分語を視野にいれているという前提になる。語とは予め与えられた文字や記号（$A, B, C, \ldots$ など）を一列に有限個並べたものである。例えば、

$$
\begin{aligned}
&A\\
&AA\\
&AB\\
&AAAAAAAAAA\\
&ABABABABAB\\
&CCAGCUGCGC\ldots
\end{aligned}
$$

など様々な語が有り得る。最後のものは、リボ核酸（RNA）の塩基配列のごくごく一部分である。

2. タイル張り

1次元タイル張りでは実数直線を線分に区切ることになるので、長さの同じ線分に同一の文字を対応させれば、平行移動を無視した配列情報としては両側無限文字列と全く同じものになる。原点との幾何学的位置関係などの情報も込めて考えるときには、両者は区別されなければならない。本論では、両者を殆ど区別しない立場で話を進める。

2次元以上のタイル張りになると、単なる配置だけではなく、タイル自身がもつ形の個性も現われてきて、面白さや複雑さが増していく。タイルという場合には、単なる有界閉集合というだけではなく、さらに内点全体の閉包をとると、もとに一致するという性質も要請する。例えば、次元の低い髭などが付着していてはいけないのである。普通は、ペンローズのタイル張りなどを思い起こしておけばよいが、ときには境界がフラクタルなどであっても許される。

中世アラビア文明における壁画や幾何学模様など、タイル張りは旧くから装飾文化としても知られている。多くの場合には、模様は周期的であるが、いわゆるペンローズのタイル張りは非周期的である。例えば２種類の菱形のタイルにより、ある点の周りに５回の回転対称性をもつようなタイル張りを作ることも可能である。一般に、ペンローズのタイル張りでは、単に非周期的というだけではなく、実は同じ模様が余り離れていない箇所に幾らでも現われるという性質があり、それも多くの研究者を引き付けている理由である（局所同型性とも呼ばれる）。同じ模様が頻繁に登場するのに、全体として周期的ではないのである。さらに、２種類のペンローズのタイル張りを比べると、一方の模様は必ず他方のどこかに現われるという事実があり、これも大変に重要な性質である（局所識別不能性とも呼ばれる）。

非周期的であるが全くのランダムという訳でもなく、そこに何らかの数学的な規則性が認められるものを、準周期的であると呼ぶことが多い（特に最近では）。上にもあるペンローズのタイル張りはその好例である。実は、ケプラー（惑星運動の三法則でも有名）は既に自分のノートに、ペンローズのタイル張りと同等の記載を残していたという報告もある。歴史的には随分と前から知られていたことになるが、準周期構造の組織的な研究が始まったのは、割と最近になってからのことである。ペンローズは自分の発見したタイル張りを特許を取るために暫く秘密にしていたという話もあるらしい。

3. 準結晶

実際の物質の世界でも、無機物には結晶構造（周期構造）とアモルファス（ランダム構造）の２種類しかないと、長いこと信じられてきて、それを誰も疑うこともなかった。それが、1984 年頃に、イスラエルの研究者シェヒトマン達のグループが、結晶構造でもランダム構造でもない内部構造をもった合金を作り出した。アルミニウムとマンガンの合金で、５回の回転対称性を内部構造にもった物質が得られたのである。数学的には５回の回転対称性がある以上結晶構造ではないのだが、しかしランダム構造でもなく、従って第三の新たな構造として認知されたのである。今では準結晶と呼ばれている。

はじめの内は、すわっ、ノーベル賞候補か！と、世界中の研究者が注目し、新しい物性の発見に一斉に取り組んだ。例えば、常温超伝導などの夢の性質が確認されるかも知れないからである。その後、現在ではブームも一段落して比較的落ち着いた状況になっている。いずれにしても、ペンローズのタイル張りも単なる知的な数学ゲームだけではなく、実際の物質の構造を色濃く反映したものであるという事実は、大変に興味深く、さらなる理論の発展が期待できる大きな発見なのであった。確かに、結晶でもなく、アモルファスでもない、ある種の数学的規則性をもった第三の構造が存在するのである。その新しい空間配置を実現する物質が創り出されたのである。

4. 全体像

語、タイル張り、準結晶と簡潔に振り返ってみたが、それから如何に研究を進めるのかはこの分野への個々の切り口によって大きく異なるであろう。ここでは、有限・無限の語（あるいは１次元タイル張り）に着目し、代数的アプローチによる一つの試みについて述べる。実際に、代数的な対象物そのものを構成することができる。その際には、Kellendonk 積という特別な演算を用いる。代数的対象物とは、典型的には群であり、環であり、体である。また、リー代数や加群も定め、さらにテンソル積の分解公式も作ることが出来る。

これらは抽象的ではあるが、一種の不変量となっている。さらに、こういう中から組合せ構造を抽出し、それにより語の特徴付けを導くことが出来る。また、抽象的な不変量だけではなく、その数値化や数式化も試みた結果、予想外にもオートマトンの基本的な性質との関連も発見された。これらの概略についても、以下の節で簡単に紹介したい。

5. 部分語と記号行列

語（有限語）とは、予め指定された文字または記号を有限個並べた

$$w = X_1X_2\cdots X_r$$

という形で与えられる。この長さを $l(w) = r$ で表す。また、$r = 0$ となるべき何も無い特別な語も考え、これを記号 ϕ で表し、空な語と呼ぶ。さらに、語 $w = X_1X_2\cdots X_r$ に対して

$$X_iX_{i+1}\cdots X_j \ (1 \le i \le j \le r)$$

を w の部分語と定め、また空な語は全ての語の部分語と思うことにする。w' が w の部分語であることを $w' \prec w$ と書き、w の部分語全体を $W(w)$ で表す。２つの語 $v = Y_1Y_2\cdots Y_s,\ w = Z_1Z_2\cdots Z_t$ に対して、$s \times t$ 記号行列 $M(v,w) = (m_{ij})$ を

$$m_{ij} = \begin{cases} Y_i & \text{if} \ \ Y_i = Z_j \\ \phi & \text{if} \ \ Y_i \neq Z_j \end{cases}$$

と定める。例えば、$v = ABAB,\ w = ABAAB$ のとき、

$$M(v,w) = \begin{pmatrix} A & \phi & A & A & \phi \\ \phi & B & \phi & \phi & B \\ A & \phi & A & A & \phi \\ \phi & B & \phi & \phi & B \end{pmatrix}$$

である。

6. 重複度と組合せ構造

前節で導入した行列の成分を、左上から右下に４５度の傾斜に沿って間に空な語が出てこない限り続けて読み進め、得られる語 u に着目する。こうして重複も込めて u の登場頻度を数え、u の重複度と呼び、$M_u(v,w)$ で表す。空な語 ϕ に対する重複度は、$M(v,w)$ の成分に現われる ϕ の個数と定める。行列に登場しない語に対しては重複度は 0 と定める。前節の例で見ると、

$$\begin{aligned} &M_{ABA}(ABAB, ABAAB) = 1 \\ &M_{AB}(ABAB, ABAAB) = 3 \\ &M_{A}(ABAB, ABAAB) = 1 \\ &M_{\phi}(ABAB, ABAAB) = 10 \\ &M_{u}(ABAB, ABAAB) = 0 \quad (\text{他の } u \text{ に対して}) \end{aligned}$$

となる。

一般に、この重複度を用いて、写像

$$M(w) : W(w) \times W(w) \times W(w) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

を $(\lambda, \mu, \nu) \mapsto M_\nu(\lambda, \mu)$ で定める。このとき、明らかに $M_\nu(\lambda, \mu) = M_\nu(\mu, \lambda)$ が成り立つ。この写像 $M(w)$ を語 w によって定まる組合せ構造と呼ぶことにする。

7. 1次元タイル張りと組合せ構造

ここでは、局所的な配列構造のみに興味を持つので、1次元タイル張りを両側無限語と同一視することにする。すなわち、1次元タイル張り $\mathbb{T}$ は両側無限語

$$\mathbb{T} = \cdots T_{-3}T_{-2}T_{-1}T_0T_1T_2T_3\cdots$$

である。このとき、

$$W(\mathbb{T}) = \{\phi\} \cup \{T_iT_{i+1}\cdots T_j \mid i \leq j\}$$

により、$\mathbb{T}$ の有限部分語全体を表し、この場合にも $M(\mathbb{T}) : (\lambda, \mu, \nu) \mapsto M_\nu(\lambda, \mu)$ により定義される写像

$$M(\mathbb{T}) : W(\mathbb{T}) \times W(\mathbb{T}) \times W(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

をタイル張り $\mathbb{T}$ によって定まる組合せ構造と呼ぶ。

8. 配列同値と局所同値

語 $w = X_1X_2\cdots X_r$ に登場する文字全体を $\Omega(w) = \{X_i \mid 1 \leq i \leq r\}$ で表し、また同様に1次元タイル張り（両側無限語）$\mathbb{T} = \cdots T_{-3}T_{-2}T_{-1}T_0T_1T_2T_3\cdots$ に登場する文字全体を $\Omega(\mathbb{T}) = \{T_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ で表す。語 v, w に対し、全単射 $\theta : \Omega(v) \longrightarrow \Omega(w)$ が存在して、

$$v = X_1X_2\cdots X_r,\ w = \theta(v) := \theta(X_1)\theta(X_2)\cdots\theta(X_r)$$

が成り立つとき、v と w は配列同値（パターンが同じ）であるという。1次元タイル張り $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ に対し、全単射 $\theta : \Omega(\mathbb{S}) \longrightarrow \Omega(\mathbb{T})$ が存在して、

$$W(\mathbb{T}) = \theta(W(\mathbb{S})) = \{\theta(v) \mid v \in W(\mathbb{S})\}$$

が成り立つとき、$\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ は局所識別不能であるという。

9. 特徴付け

組合せ構造を用いて、語（有限語）と1次元タイル張り（両側無限語）の特徴付けが得られる。ただし、記号 ${}^tw$ と ${}^t\mathbb{T}$ は

$$w = X_1X_2\cdots X_r, \quad \mathbb{T} = \cdots T_{-3}T_{-2}T_{-1}T_0T_1T_2T_3\cdots$$

に対して、

$${}^tw = X_r\cdots X_2X_1, \quad {}^t\mathbb{T} = \cdots T_3T_2T_1T_0T_{-1}T_{-2}T_{-3}\cdots$$

で定義される。

事実１．語 v, w に対して次は同値である。
(1) v と w の組合せ構造は同じである。
(2) v と w または v と ${}^t w$ は配列同値である。

事実２．1次元タイル張り $\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ に対して次は同値である。
(1) $\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ の組合せ構造は同じである。
(2) $\mathbb{S}$ と $\mathbb{T}$ または $\mathbb{S}$ と ${}^t\mathbb{T}$ は局所識別不能である。

ここに、2つの写像 $M : W \times W \times W \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $M' : W' \times W' \times W' \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が同じ組合せ構造であるとは、全単射 $\psi : W \longrightarrow W'$ が存在して、$M = M' \circ (\psi \times \psi \times \psi)$ が成立していることと定める。

10. 演算と代数系

ここでは、1次元タイル張り $\mathbb{T}$ に付随させて半群を導入する。有限部分単語（空な語を除く） $w = X_1 X_2 \cdots X_r \in W(\mathbb{T})$ に対して、三つ組み (i, w, j) を考える。ここに、$1 \leq i, j \leq l(w)$ とする。また、抽象的な文字記号として、$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{z}$ を考える。そして集合 $\mathfrak{M} = \{(i, w, j) \mid w \in W(\mathbb{T}),\ w \neq \phi,\ 1 \leq i, j \leq l(w)\} \cup \{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{z}\}$ を定める。この $\mathfrak{M}$ に Kellendonk 積と呼ばれる演算を以下の様に定義する。(i, u, j), (k, v, ℓ) に対して、u の j 番目と v の k 番目を重ねてみる。

(1) 重なり合う部分の文字がすべて完全に一致し、この重ね合わせで得られた新たな単語 w が $W(\mathbb{T})$ に属するとき、u の i 番目の文字の位置を新たな単語の中で数えなおした番号を m とし、v の ℓ 番目の文字の位置を新たな単語の中で数えなおした番号を n として、

$$(i, u, j) \bullet (k, v, \ell) = (m, w, n)$$

と定める。

(2) そうでないとき、すなわち、

(2-1) 重なり合う部分のどこかで文字が異なるとき、または

(2-2) 重なり合う部分の文字が全て完全に一致しているが、この重ね合わせで得られた新たな単語 w が $W(\mathbb{T})$ に属さないとき、

$$(i, u, j) \bullet (k, v, \ell) = \boldsymbol{z}$$

と定める。

さらに、全ての元 $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{M}$ に対して、

$$\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} \bullet \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \bullet \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

と定める。これにより、$\mathfrak{M}$ は半群となる。

この半群から出発して、様々な議論により、興味深い性質を持つ群やリー代数などを定めることができる。良い性質を生じさせるためには、ある程度の面倒な細かな工夫が必要になる。ここでは話を単純化した形で簡潔に多元環 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbb{T}) = \mathbb{C}[\mathfrak{M}] = \oplus_{\boldsymbol{x} \in \mathfrak{M}} \mathbb{C}\boldsymbol{x}$ を、複素数を係数にもつ $\mathfrak{M}$ の半群環として導入しておく。

11. 標準加群とテンソル積分解
有限部分語（空な語ではない） $\lambda \in W(\mathbb{T})$ に対して、イデアル $I(\lambda) = \mathfrak{A} \bullet (1, \lambda, 1) \bullet \mathfrak{A}$ とイデアル $J(\lambda) = \sum_{\lambda \prec \mu,\ \lambda \neq \mu} I(\mu)$ を定め、$I(\lambda)$ の $J(\lambda)$ による剰余を $\mathfrak{A}(\lambda)$ とすると、$\mathfrak{A}(\lambda) = I(\lambda)/J(\lambda) \simeq M(l(\lambda), \mathbb{C})$ を得る。従って、$\mathfrak{A}(\lambda)$ には既約加群 $V(\lambda) = \mathfrak{A} \bullet [(1, \lambda, 1) \bmod J(\lambda)]$ が定まる。この $V(\lambda)$ を $\mathfrak{A}$ の標準加群と呼ぶ。ここで、$\dim V(\lambda) = l(\lambda)$ に注意しておこう。また、自明な加群も空な語に対応させて $V(\phi) = \mathbb{C}$ と定めておこう。このとき、標準加群のテンソル積の分解規則は以下の公式で与えられる。

分解公式. $\lambda, \mu \in W(\mathbb{T})$ とするとき、

$$V(\lambda) \bigotimes V(\mu) = \bigoplus_{\nu \in W(\mathbb{T})} V(\nu)^{\oplus M_\nu(\lambda,\mu)}$$

が成立する。ここに、$V^{\oplus m} = \underbrace{V \oplus \cdots \oplus V}_{m}$ である。

12. 不変量と変形
前節までで導入された標準加群に対して、直和とテンソル積を保存する不変量といえば、とりもなおさず次元写像

$$\dim : \{V(\lambda) \mid \lambda \in W(\mathbb{T})\} \to \mathbb{R}_{>0}\ , \quad V(\lambda) \mapsto \dim V(\lambda) = l(\lambda)$$

である。これで十分であるという立場もある。しかし、これでは $AAA \mapsto 3,\ AAB \mapsto 3,\ ABA \mapsto 3$ となり、文字の並び方が全く反映されていない。そこで、直和を保つことは残すが必ずしもテンソル積は保たなくてもよいとし、しかし組合せ構造はある程度は反映させることにする。例えば、ここでは

$$\begin{aligned}
&\pi_q : V(\lambda) \mapsto \pi_q(\lambda) \in \mathbb{R}_{>0} \\
&\pi_q(\phi) = q \\
&\pi_q(\lambda)^2 = \textstyle\sum_{\mu \in W(\lambda)} M_\mu(\lambda, \lambda) \pi_q(\mu) \quad \text{if } \lambda \neq \phi
\end{aligned}$$

を満たす写像 π_q を考えよう。そうすれば、情報は λ 自身だけで済む。さらに、$\pi_q(\lambda)$ は真の部分語の値から２次方程式を解けばよく、それら２つの解は実数であり、そのうち大きい方は必ず正で、その正の解を選ぶことにより、帰納的に $\pi_q(\lambda)$ が次々と定まっていく。このとき、もし $q = 1$ に選べば、$\pi_1 = \dim$ となり次元写像が復活する。つまり、ここでの π_q は次元写像 dim の変形と考えることもできる。さらに、この変形を普遍的に考えて、

$$\begin{aligned}
&f : V(\lambda) \mapsto f_\lambda(t) \in \mathbb{R}[[t]] \\
&f_\lambda(0) \in \mathbb{R}_{>0} \\
&f_\phi(t) = t \\
&f_\lambda(t)^2 = \textstyle\sum_{\mu \in W(\lambda)} M_\mu(\lambda, \lambda) f_\mu(t) \quad \text{if } \lambda \neq \phi
\end{aligned}$$

により、形式的冪級数 $f_\lambda(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^i \in \mathbb{R}[[t]]$ を帰納的に定めることができる。そこで、体 $K_\lambda = \mathbb{Q}(c_0, c_1, c_2, \ldots)$ を λ に対して定義する。この K_λ は代数体（有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体）であることも分かっている。

基本的な例で見ると、

$$f_A(t)=1,\ f_{AA}(t)=2,\ f_{AAA}(t)=3$$

であり、これらは冪級数というよりも定数項のみである。一般に、

$$w=\underbrace{AAA\cdots A}_{k} \quad\Longrightarrow\quad f_w(t)=k$$

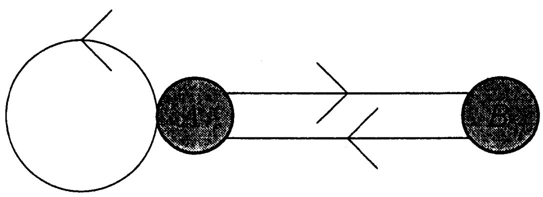
となることも知られている。さらに、別の例では

$$\begin{aligned}
f_{AB}(t) &= 1+2t-4t^2+6t^3-80t^4+488t^5-2688t^6+\cdots\\
f_{AAB}(t) &= 2+\frac{4}{3}t-\frac{16}{27}t^2+\frac{128}{243}t^3-\frac{1280}{2187}t^4+\frac{14336}{19682}t^5-\cdots\\
f_{AABB}(t) &= \frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{8}{\sqrt{17}}t-\frac{64}{17\sqrt{17}}t^2+\frac{1024}{289\sqrt{17}}t^3-\cdots
\end{aligned}$$

など、様々な係数が現われてくる。

13. オートマトン

次の図式に従う（周期的とは限らない最も単純な）オートマトンを考える。



即ち、A の次には A, B の何れかに移動し、B の次には必ず A に移動するシステムである。習慣により、このオートマトンを黄金比移動（Golden Mean Shift）と呼ぶこともある。名前は、黄金比にまつわる（例えばフィボナッチ数などに由来する）記号列との関係に由来する。ここで、ひとつ面白い結果を紹介する。

定理. 語 $w=X_1X_2\cdots X_r$ が黄金比移動に従うと仮定する。（あるいは、2文字 A,B からなる文字列で、B は2つ連続しないものと言っても同じである。）さらに、$X_1=A$ または $X_r=A$ であるものとする。（すなわち、B で始まり B で終わる場合は排除する。）このとき、$K_w=\mathbb{Q}$ が成り立つ。さらに、$f_w(0)=c_0$ は w に登場する A の個数であり、とくに $f_w(0)=c_0\in\mathbb{Z}_{>0}$ となる。

この定理は多くの数値実験を繰り返しているうちに発見されたものである。例えば $w=ABAABABAABAABABAABABA$ ならば $K_w=\mathbb{Q}$ である。これは典型的なフィボナッチ記号列の例である。

14. 予想と問題

前節の定理に関して、ある意味で逆も成り立つのではないかと推測される。主張は以下の通りである。

(1) $w = X_1X_2\cdots X_r$ $(r \geq 4)$ が黄金比移動に従う語とし、$X_1 = X_r = B$ かつ $AA \in W(w)$ と仮定するとき、$K_w \neq \mathbb{Q}$ であろう。

さらに、次の課題も残されている。

(2) $w = X_1X_2\cdots X_r$ $(r \geq 4)$ が黄金比移動に従わない語の場合、何が一般に成立しているのか？

15. 文献

語に関する一般的な事柄は [1],[3],[8],[9] を、Kellendonk 積に関する事柄は [4],[5],[6],[7] を、より一般の代数系を付随させる話は [2],[10],[11],[12] を参照のこと。

[1] S. Akiyama and M. Shirasaka : Recursively renewable words and coding of irrational rotations, J. Math. Soc. Japan 59 (2007), 1199 – 1234.

[2] D. Dobashi and J. Morita : Groups, Lie algebras and Gauss decompositions for one dimensional tilings, Nihonkai Math. J. (4) 17 (2006), 77 – 88.

[3] P. N. Fogg : "Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics," LNM 1794, Springer, Berlin, 2002.

[4] J. Kellendonk : Noncommutative geometry of tilings and gap labelling, Rev. Math. Phys. (7) 7 (1995), 1133 – 1180.

[5] J. Kellendonk : The local structure of tilings and their integer group of coinvariants, Comm. Math. Phys. 187 (1997), 115 – 157.

[6] J. Kellendonk and I. F. Putnam : Tilings, C^*-algebras and K-theory, "Directions in mathematical quasicrystals," CRM Monogr. Ser. 13 (2000), 177 – 206, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[7] M. Lawson : "Inverse Semigroups" (The Theory of Partial Symmetries), World Scientific, Singapore, 1998.

[8] D. Lind and B. Marcus : An introduction to symbolic dynamics and coding, Cambridge Univ. Press, New York, 1995.

[9] M. Lothaire : "Algebraic combinatorics on words," Encyclopedia of Mathematics and its Application 90, Cambridge, 2002.

[10] T. Masuda and J. Morita : Local properties, bialgebras and representations for one dimensional tilings, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 2661 – 2669.

[11] J. Morita : Tilings, Lie theory and combinatorics, Contemp. Math. 506 (2010), 173 – 185.

[12] J. Morita and A. Terui : Words, tilings and combinatorial spectra, Hiroshima Math. J. 39 (2009), 37 – 60.